QUESTÃO 1

a) Após o preenchimento de todo o tabuleiro seguindo esta regra, sejam a_1, a_2, a_3, ..., a_{11} os números presentes nesta diagonal, sendo a_k o número localizado na linha k e coluna k. Deste modo, temos, por exemplo, que $a_6 = 1$.

É possível notar que, com relação ao número central (a_6), os números escritos nas casas localizadas na "diagonal abaixo" (uma casa para direita e uma para baixo) são os quadrados dos números ímpares. Assim:

$$a_7 = 3^2 = 9$$
$$a_8 = 5^2 = 25$$
$$a_9 = 7^2 = 49$$
$$a_{10} = 9^2 = 81$$
$$a_{11} = 11^2 = 121$$

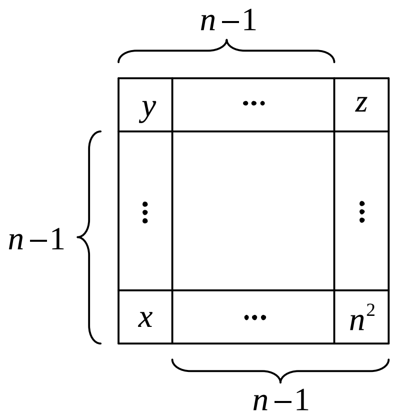
Por outro lado, com relação ao número central (a_6), os números escritos nas casas localizadas na "diagonal acima" (uma casa para esquerda e uma para cima) são os quadrados dos números pares acrescidos de uma unidade. Assim:

$$a_5 = 2^2 + 1 = 5$$
$$a_4 = 4^2 + 1 = 17$$
$$a_3 = 6^2 + 1 = 37$$
$$a_2 = 8^2 + 1 = 65$$
$$a_1 = 10^2 + 1 = 101$$

Logo, a soma de todos os números presentes na diagonal assinalada pela seta na figura é:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10} + a_{11}$$
$$S = 101 + 65 + 37 + 17 + 5 + 1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121$$
$$\boxed{S = 511}$$

b) Em um tabuleiro $n \times n$, com n ímpar, seguindo a mesma regra de construção dos números a partir da casa central, sabemos que o número localizado no canto inferior direito é n^2, já que podemos usar a mesma ideia do item anterior.



Como a última linha possui n elementos, o número do canto inferior esquerdo é

$$x = n^2 - (n-1)$$
$$\boxed{x = n^2 - n + 1}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, o número do canto superior esquerdo é:

$$y = x - (n-1)$$
$$y = n^2 - n + 1 - n + 1$$
$$\boxed{y = n^2 - 2n + 2}$$

E o número do canto superior direito é:

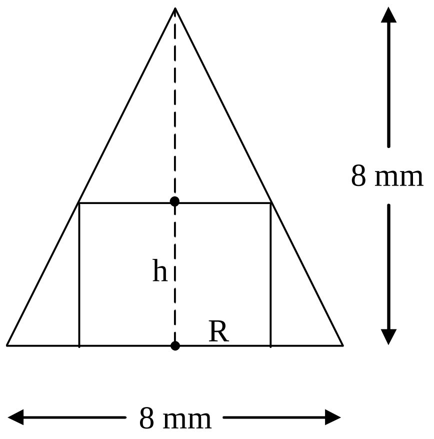
$$z = y - (n-1)$$
$$z = n^2 - 2n + 2 - n + 1$$
$$\boxed{z = n^2 - 3n + 3}$$

Portanto, a soma dos números localizados na casa do canto inferior esquerdo e na casa do canto superior direito é:

$$x + z = n^2 - n + 1 + n^2 - 3n + 3$$
$$\boxed{x + z = 2n^2 - 4n + 4}$$

QUESTÃO 2

a) Considerando a seção meridiana do cone com o furo cilíndrico ilustrada abaixo e usando semelhança de triângulos, temos que:



$$\frac{8}{8}=\frac{8-h}{2R}$$
$$\Rightarrow 2R=8-h$$
$$\Rightarrow \boxed{h=8-2R}$$

b) A área lateral do furo cilíndrico é dada por:

$$A_L=2\pi Rh$$
$$A_L=2\pi R(8-2R)$$
$$\boxed{A_L=-4\pi R^2+16\pi R}$$

c) A área lateral do furo cilíndrico é uma função quadrática do seu raio. Como o coeficiente do termo quadrático é negativo, a área lateral terá um valor máximo, o que ocorre quando R for igual a:

$$R_V=\frac{-16\pi}{2\cdot(-4\pi)}\Rightarrow \boxed{R_V=2\ mm}$$

Neste caso, a altura do furo cilíndrico será:

$$h_V=8-2R_V\Rightarrow \boxed{h_V=4\ mm}$$

Logo, a área lateral máxima do furo cilíndrico será:

$$A_{L\_Máxima}=-4\pi\cdot 2^2+16\pi\cdot 2\Rightarrow \boxed{A_{L\_Máxima}=16\pi\ \ mm^2}$$

d) Vamos, primeiramente, calcular os volumes do cone e do furo cilíndrico de área lateral máxima:

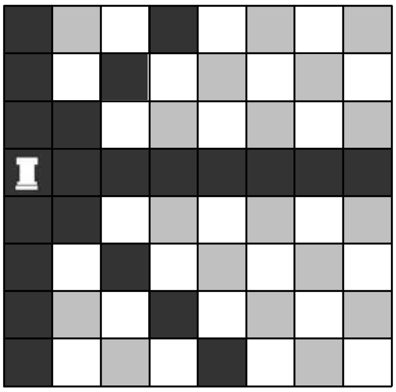
$$V_{Cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \Rightarrow \boxed{V_{Cone} = \frac{128\pi}{3} \ mm^3}$$

$$V_{Furo} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{V_{Furo} = 16\pi \ mm^3}$$

O percentual pedido é:

$$\frac{V_{Furo}}{V_{Cone}} = \frac{16\cancel{\pi}}{\frac{128\cancel{\pi}}{3}} = \frac{3}{8} = 0,375 = \underline{37,5\%}|$$

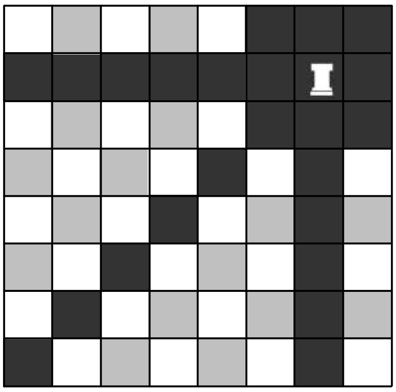
QUESTÃO 3



a) Para cada uma das 28 casas da Região 1 em que a Torre for posicionada, há 22 casas onde o bispo não pode ser colocado de modo a garantir que ele não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre, ou seja, há $64-22=42$ casas onde o bispo pode ser posicionado.

Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 1 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre é:

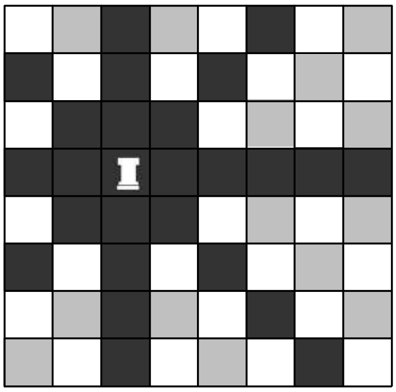
$$28\cdot 42=1176$$



b) Para cada uma das 20 casas da Região 2 em que a Torre for posicionada, há 24 casas onde o bispo não pode ser colocado de modo a garantir que ele não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre, ou seja, há $64-24=40$ casas onde o bispo pode ser posicionado.

Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 2 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre é:

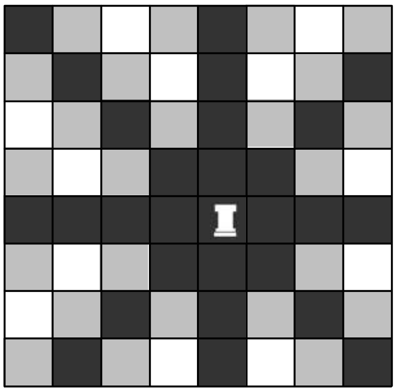
$$20\cdot 40=800$$



c) Para cada uma das 12 casas da Região 3 em que a Torre for posicionada, há 26 casas onde o bispo não pode ser colocado de modo a garantir que ele não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre, ou seja, há $64-26=38$ casas onde o bispo pode ser posicionado.

Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 3 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre é:

$$12\cdot 38=456$$



Para cada uma das 4 casas da Região 4 em que a Torre for posicionada, há 28 casas onde o bispo não pode ser colocado de modo a garantir que ele não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre, ou seja, há $64-28=36$ casas onde o bispo pode ser posicionado.

Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 4 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre é:

$$4 \cdot 36 = 144$$

Ora, ao posicionarmos uma Torre no tabuleiro, ela obrigatoriamente ficará ou na Região 1 ou na 2 ou na 3 ou na 4. Logo, o número de maneiras em que podemos posicionar uma Torre e um Bispo neste tabuleiro, de modo que eles não fiquem na mesma linha, coluna ou diagonal é:

$$1176 + 800 + 456 + 144 = 2576$$

QUESTÃO 4

a) Como o triângulo ADC é retângulo em D, podemos concluir, pelo Teorema de Pitágoras, que:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$
$$AC^2 = 6^2 + 8^2$$
$$\boxed{AC = 10}$$

Sabemos que, em todo retângulo, os lados opostos são paralelos e os seus quatro ângulos internos são retos. Assim, pelas informações do enunciado, temos que $\overline{PG}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e, por serem ambos os segmentos cortados por uma mesma transversal ($\overline{AC}$), concluímos que os ângulos $A\hat{P}G$ e $A\hat{C}D$ são correspondentes e, portanto, têm mesma medida. Os ângulos $A\hat{G}P$ e $A\hat{D}C$ são também, pelo mesmo motivo, correspondentes e, portanto têm mesma medida (ambos iguais a 90º). Deste modo, os triângulos APG e ACD são semelhantes, pelo caso ângulo-ângulo. Portanto:

$$\frac{PG}{CD} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow \frac{PG}{8} = \frac{x}{10} \Rightarrow \boxed{PG = \frac{4x}{5}}$$

b) Usando a mesma semelhança de triângulos do item anterior, temos que:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow \frac{AG}{6} = \frac{x}{10} \Rightarrow \boxed{AG = \frac{3x}{5}}$$

c) A região cinza da figura, que tem área $A(x)$, é formada pela união dos triângulos APG, BPE e CPF. Calculemos cada uma dessas áreas, em função de *x*, para $0 \le x \le 10$:

$$A_{\Delta APG} = \frac{1}{2} \cdot PG \cdot AG$$
$$A_{\Delta APG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{5} \cdot \frac{3x}{5}$$
$$\boxed{A_{\Delta APG} = \frac{6x^2}{25}}$$

$$A_{\Delta BPE} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EP$$
$$A_{\Delta BPE} = \frac{1}{2} \cdot \left(8 - \frac{4x}{5}\right) \cdot \frac{3x}{5}$$
$$A_{\Delta BPE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{24x}{5} - \frac{12x^2}{25}\right)$$
$$\boxed{A_{\Delta BPE} = \frac{12x}{5} - \frac{6x^2}{25}}$$

$$A_{\Delta CPF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FP$$
$$A_{\Delta CPF} = \frac{1}{2} \cdot \left(8 - \frac{4x}{5}\right) \cdot \left(6 - \frac{3x}{5}\right)$$
$$A_{\Delta CPF} = \frac{1}{2} \cdot \left(48 - \frac{24x}{5} - \frac{24x}{5} + \frac{12x^2}{25}\right)$$
$$\boxed{A_{\Delta CPF} = 24 - \frac{24x}{5} + \frac{6x^2}{25}}$$

Logo, para $0 \le x \le 10$:

$$A(x) = A_{\Delta APG} + A_{\Delta BPE} + A_{\Delta CPF}$$
$$A(x) = \frac{6x^2}{25} + \frac{12x}{5} - \cancel{\frac{6x^2}{25}} + 24 - \frac{24x}{5} + \cancel{\frac{6x^2}{25}}$$
$$\boxed{A(x) = \frac{6}{25}x^2 - \frac{12}{5}x + 24}$$

d) $A(x)$ é uma função quadrática de *x*. Como o coeficiente do termo quadrático é positivo, $A(x)$ terá um valor mínimo, o que ocorre quando *x* for igual a:

$$x_V = \frac{-\left(-\frac{12}{5}\right)}{2\cdot\left(\frac{6}{25}\right)} = \frac{\cancel{12}}{5}\cdot\frac{25}{\cancel{12}} \Rightarrow \boxed{x_V = 5}$$

Neste caso, teremos a área mínima igual a:

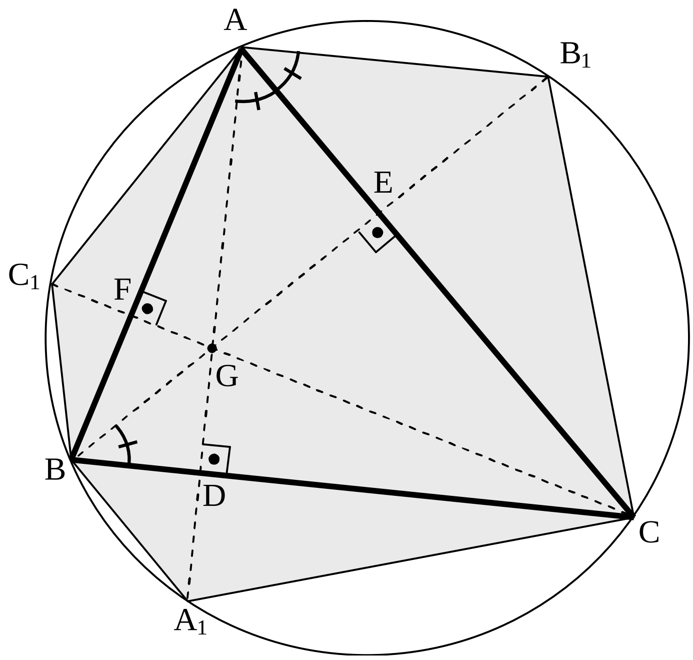
$$A_{\text{Mín}} = \frac{6}{\cancel{25}}\cdot \cancel{5^2} - \frac{12}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5} + 24$$
$$A_{\text{Mín}} = 6 - 12 + 24$$
$$\boxed{A_{\text{Mín}} = 18}$$

QUESTÃO 5

a) Primeiramente, note que $E\hat{B}C$ e $B_1\hat{B}C$ referem-se ao mesmo ângulo. Como $B_1\hat{A}C$ e $B_1\hat{B}C$ são dois ângulos inscritos na circunferência que interceptam o mesmo arco $\overset{\frown}{B_1C}$, eles necessariamente têm a mesma medida. Logo, $B_1\hat{A}C$ e $E\hat{B}C$ tem a mesma medida

b) Os triângulos DAC e EBC possuem um ângulo reto cada um (com vértice em D e E, respectivamente) e um ângulo em comum (com vértice em C). Logo, pelo caso AA (ângulo-ângulo), estes triângulos são semelhantes e, portanto, o terceiro ângulo de cada um deles devem ser iguais entre si também. Logo, $D\hat{A}C$ e $E\hat{B}C$ tem a mesma medida.

c) Os triângulos AEG e AEB_1 são congruentes pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo), já que os seus ângulos de vértice em A possuem medidas iguais, como mostrado nos itens anteriores, apresentam o lado $\overline{AE}$ em comum e possuem ângulo reto de vértice E.



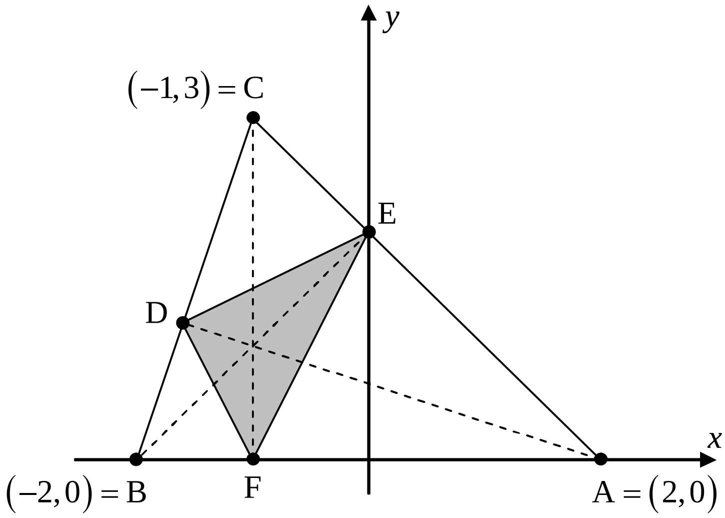
Logo, os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{EB_1}$ possuem mesmo comprimento e, portanto, os triângulos AGC e AB_1C possuem mesma área, pois apresentam mesma base $(\overline{AC})$ e alturas de mesmo comprimento.

De maneira análoga, pode-se provar que as áreas dos triângulos AGB e AC_1B são iguais e que as áreas de BGC e BA_1C são iguais.

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} S_{BC_1AB_1CA_1} &= S_{AGC} + S_{AB_1C} + S_{BGC} + S_{BA_1C} + S_{AGB} + S_{AC_1B} \\ &= S_{AGC} + S_{AGC} + S_{BGC} + S_{BGC} + S_{AGB} + S_{AGB} \\ &= 2\cdot(S_{AGC} + S_{BGC} + S_{AGB}) \\ &= 2\cdot S_{ABC} \end{aligned}$$

d) Sejam D, E e F os três pés das alturas do triângulo ABC, como indicado na figura a seguir.



Pode-se facilmente perceber que as coordenadas do ponto F são:

$$\mathrm{F}=(-1,0)$$

Para que possamos descobrir as coordenadas dos pontos D e E, a fim calcular a área do triângulo órtico posteriormente, devemos, primeiramente, encontrar as equações das retas $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ para, depois, encontrar as suas intersecções.

<u>Determinação do ponto E</u>:

A equação da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é do tipo $y=m_{AC}x+n_{AC}$. Temos que:

$$m_{AC}=\frac{3-0}{-1-2}\Rightarrow \boxed{m_{AC}=-1}$$

Como $\overleftrightarrow{AC}$ contém o ponto $\mathrm{A}=(2,0)$, temos que

$$0=-1\cdot 2+n_{AC}\Rightarrow \boxed{n_{AC}=2}$$

Logo, a equação da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é

$$\boxed{y=-x+2}$$

A equação da reta $\overleftrightarrow{BE}$ é do tipo $y = m_{BE}x + n_{BE}$. Como $\overleftrightarrow{BE}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$, temos que:

$$m_{BE} = \frac{-1}{m_{AC}} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \boxed{m_{BE} = 1}$$

Como $\overleftrightarrow{BE}$ contém o ponto $B = (-2, 0)$, temos que

$$0 = 1 \cdot (-2) + n_{BE} \Rightarrow \boxed{n_{BE} = 2}$$

Logo, a equação da reta $\overleftrightarrow{BE}$ é

$$\boxed{y = x + 2}$$

O ponto E pode ser obtido resolvendo-se o sistema:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 0} \text{ e } \boxed{y = 2} \Rightarrow \boxed{E = (0, 2)}$$

<u>Determinação do ponto D</u>:

A equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é do tipo $y = m_{BC}x + n_{BC}$. Temos que:

$$m_{BC} = \frac{3 - 0}{-1 - (-2)} \Rightarrow \boxed{m_{BC} = 3}$$

Como $\overleftrightarrow{BC}$ contém o ponto $B = (-2, 0)$, temos que

$$0 = 3 \cdot (-2) + n_{BC} \Rightarrow \boxed{n_{BC} = 6}$$

Logo, a equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é

$$\boxed{y = 3x + 6}$$

A equação da reta $\overleftrightarrow{AD}$ é do tipo $y = m_{AD}x + n_{AD}$. Como $\overleftrightarrow{AD}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$, temos que:

$$m_{AD} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{m_{AD} = -\frac{1}{3}}$$

Como $\overleftrightarrow{AD}$ contém o ponto $A=(2,0)$, temos que

$$0=-\frac{1}{3}\cdot 2+n_{AD}\Rightarrow \boxed{n_{AD}=\frac{2}{3}}$$

Logo, a equação da reta $\overleftrightarrow{AD}$ é

$$\boxed{y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}$$

O ponto D pode ser obtido resolvendo-se o sistema:

$$\begin{cases} y=3x+6 \\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \end{cases}\Rightarrow \boxed{x=-1,6} \text{ e } \boxed{y=1,2}\Rightarrow \boxed{D=(-1,6;\ 1,2)}$$

A área do triângulo órtico (DEF) é:

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -1 & 0 & -1,6 & -1 \\ 0 & 2 & 1,2 & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$S=\frac{1}{2}\left|-2+3,2+1,2\right|$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2,4$$

$$\boxed{S=1,2}$$